2d N=(2,2)超对称和镜像对称性

陈嘉莘PB22000007

2025 年 5 月 24 日

2d N=(2,2)超对称自上世纪80年代弦论的世界面场论的研究兴起，由镜像对称性的发现达到顶峰。镜像对称性是两个不同手征的2d N=(2,2)超对称理论的对应，进一步推广到两个卡拉比-丘（Calabi-Yau）空间的对应。这一对应不仅有很漂亮的数学结构，也有丰富的物理内涵。我将简要概述人们对2d N=(2,2)超对称的研究和镜像对称性的表述和相关性质。

目录

1 2d N=(2,2)超对称的超空间语言

我们先考虑一个欧氏平面$\mathbb{R}^2$,并引入时空坐标，

$$x^0 = t, x^1 = s \tag{1}$$

同时取平直的具有闵氏号差的度规

$$\eta = diag(-1, 1) \tag{2}$$

为了定义超空间，我们引入Grassmann数的坐标

$$\theta^{\pm}, \bar{\theta}^{\pm} \tag{3}$$

这里用$\bar{\theta}$代表θ的复共轭。一个二维的Lorentz变换是对实数坐标的一个双曲转动，考虑到Grassmann坐标的性质，有

$$\theta \to e^{\pm\frac{\gamma}{2}}\theta^{\pm} \tag{4}$$

同时Grassmann数本身具有反对称性，对复共轭同样具有这样的反对称性。我们可以由此定义超场(superfield)，因为Grassmann数自身相乘得到0，由此展开超场为

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x,\theta,\bar{\theta}) = f_0(x^0,x^1) + \theta^+ f_+(x^0,x^1) + \theta^- f_-(x^0,x^1) +\\ \bar{\theta}^+ f'_+(x^0,x^1) + \bar{\theta}^- f'_-(x^0,x^1) + \theta^+\theta^- f_{+-}(x^0,x^1) + ...\end{aligned} \tag{5}$$

同样我们也可以在超空间上引入微分算符，并且计算这些微分算符的对易关系：

$$Q_{\pm} = \frac{\partial}{\partial\theta^{\pm}} + i\bar{\theta}^{\pm}\partial_{\pm} \tag{6}$$

$$\bar{Q}_{\pm} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\pm}} - i\theta^{\pm}\partial_{\pm} \tag{7}$$

计算得到

$$\{Q_{\pm}, \bar{Q}_{\pm}\} = -2i\partial_{\pm} \tag{8}$$

这里我们用$\partial_\pm$简记$\frac{1}{2}(\partial_0 \pm \partial_1)$ 同时定义另一组微分算符为

$$D_\pm = \frac{\partial}{\partial\theta^\pm} - i\bar{\theta}^\pm\partial_\pm \tag{9}$$

$$\bar{D}_\pm = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^\pm} + i\theta^\pm\partial_\pm \tag{10}$$

显然也可以得到这组算符的对易关系

$$\{D_\pm, Q_\pm\} = 0 \tag{11}$$

$$\{D_\pm, \bar{D}_\pm\} = 2i\partial_\pm \tag{12}$$

超场有两种旋转操作，我们通常记作向量型（V,Vector）和轴型（A,Axial），分别为

$$e^{i\alpha F_V} : \mathcal{F}(x^\mu, \theta^\pm, \bar{\theta}^\pm) \to e^{i\alpha q_V}\mathcal{F}(x^\mu, e^{-i\alpha}\theta^\pm, e^{i\alpha}\bar{\theta}^\pm) \tag{13}$$

$$e^{i\alpha F_A} : \mathcal{F}(x^\mu, \theta^\pm, \bar{\theta}^\pm) \to e^{i\alpha q_A}\mathcal{F}(x^\mu, e^{\mp i\beta}\theta^\pm, e^{\pm i\beta}\bar{\theta}^\pm) \tag{14}$$

其中q_A和q_V称为R-charge.我们也可以在此时定义手征和反手征（chiral和antichiral）的超场

$$\bar{D}_\pm\Phi = 0 \tag{15}$$

$$D_\pm\bar{\Phi} = 0 \tag{16}$$

显然手征和反手征限制了超场可以取的项。同时定义了twisted的超场和反超场

$$\bar{D}_+U = D_-U = 0 \tag{17}$$

$$D_+\bar{U} = \bar{D}_-\bar{U} = 0 \tag{18}$$

这也限制了超场可以取的项。

2 构建作用量

2.1 D term

我们所谓的构建作用量，即需要找到在超对称变换

$$\delta = \epsilon_+Q_- - \epsilon_-Q_+ - \bar{\epsilon}_+\bar{Q}_- + \bar{\epsilon}_-\bar{Q}_+ \tag{19}$$

下保持不变的作用量。一种简单的构造来自

$$\int d^2xd^4\theta K(\mathcal{F}_i)=\int d^2xd\theta^+d\theta^-d\bar{\theta}^-d\bar{\theta}^+K(\mathcal{F}_i) \tag{20}$$

我们将超对称变换作用上去，只写第一项，后面同理，其中$K(\mathcal{F}_i)$是一个有关超场的可微的函数

$$\int d^2xd^4\theta\epsilon_+(Q_i\mathcal{F}_i)\frac{\partial K}{\partial\mathcal{F}_i}=\int d^2xd^4\theta\epsilon_-(\frac{\partial}{\partial\theta^-}+i\bar{\theta}^-\partial_-)K(\mathcal{F}_i) \tag{21}$$

回顾Grassmann数的积分规则，$d^4\theta$只有在全部θ都有的时候才非0，这说明第一项是0，第二项对x是全微分项，可以作为边界儿忽略。显然这种项是变换不变的，我们称之为D term。

2.2 F term和twisted F term

另一种项用手征超场的全纯函数构造，我们用$W(\Phi_i)$来记这种全纯函数，

$$\int d^2xd^2\theta W(\Phi_i)=\int d^2xd\theta^-d\theta^+W(\Phi_i)|_{\bar{\theta}^\pm=0} \tag{22}$$

将变换作用上去之后，先考虑$\epsilon_\pm$项

$$\pm\int d^2xd\theta^-d\theta^+\epsilon_\pm(\frac{\partial}{\partial\theta^\mp}+i\bar{\theta}^\mp\partial_\mp)W(\Phi_i)|_{\bar{\theta}^\pm=0} \tag{23}$$

这和D term是一致的：前项没有全部的θ，后项在x中是全微分项，因此也等于0。再考虑$\bar{\epsilon}_\pm$项

$$\mp\int d^2xd\theta^-d\theta^+\bar{\epsilon}_\pm(\bar{D}_\mp-2i\theta^\pm\partial_\pm)W(\Phi_i)|_{\bar{\theta}^\pm=0} \tag{24}$$

第一项由于我们假设了$W(\Phi_i)$是全纯函数，因此也是0，第二项仍然是x的全导数，因此这样构造的项也是超对称不变的，我们称之为F term.同理，对于

$$\int d^2xd^2\tilde{\theta}\tilde{W}(U_i)=\int d^xd\bar{\theta}^-d\theta^+\tilde{W}(U_i)|_{\bar{\theta}^+=\theta^-=0} \tag{25}$$

也因为同样的理由是超对称不变的，这样的项我们称之为twisted F term。

3 2d N=(2,2)场论的例子

3.1 D term和F term的构造

我们先考虑一个手征场，由于定义，因此展开可以确定为

$$\begin{aligned}\Phi = \phi - i\theta^+\bar{\theta}^+\partial_+\phi - i\theta^-\bar{\theta}^-\partial_-\phi - \theta^+\theta^-\bar{\theta}^-\bar{\theta}^+\partial_+\partial_-\phi \\ +\theta^+\psi_+ - i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^-\partial_-\psi_+ + \theta^-\psi_- - i\theta^-\theta^+\bar{\theta}^+\partial_+\psi_- + \theta^+\theta^-F\end{aligned} \tag{26}$$

若我们假设基本的D term为

$$S_{kin} = \int d^2xd^4\theta\bar{\Phi}\Phi \tag{27}$$

因此有

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}\Phi|_{\theta^4} = -\bar{\phi}\partial_+\partial_-\phi + \partial_+\bar{\phi}\partial_-\phi + \partial_-\bar{\phi}\partial_+\phi - \partial_+\partial_-\bar{\phi}\phi \\ +i\bar{\psi}_+\partial_-\psi_+ - i\partial_-\bar{\psi}_+\psi_+ + i\bar{\psi}_-\partial_+\psi_- - i\partial_+\bar{\psi}_-\psi_- + |F|^2\end{aligned} \tag{28}$$

分部积分得到

$$S_{kin} = \int d^2x(|\partial_0\phi|^2 - |\partial_1\phi|^2 + i\bar{\psi}_-(\partial_0+\partial_1)\psi_- + i\bar{\psi}_+(\partial_0-\partial_1)\psi_+ + |F|^2) \tag{29}$$

再考虑F term

$$S_W = \int d^2xd^2\theta W(\Phi) + c.c \tag{30}$$

这时的$W(\Phi)$也常被称做超势(superpotential)，根据我们上面对Φ可能的项的分析，此时可以得到

$$W(\Phi)|_{\theta^2} = W^{'}(\phi)F - W^{''}(\phi)\psi_+\psi_- \tag{31}$$

因此得到

$$S_W = \int d^2x(W^{'}(\phi)F - W^{''}(\phi)\psi_+\psi_- + \bar{W}^{'}(\bar{\phi})\bar{F} - \bar{W}^{''}(\bar{\phi})\bar{\psi}_-\bar{\psi}_+) \tag{32}$$

总的理论的作用量即此时的F term和D term之和，我们将其形式写作

$$\begin{aligned}S = \int d^2x(|\partial_0\phi|^2 - |\partial_1\phi|^2 - |W^{'}(\phi)|^2 + i\bar{\psi}_-(\partial_0+\partial_1)\psi_- + i\bar{\psi}_+(\partial_0-\partial_1)\psi_+ \\ -W^{''}(\phi)\psi_+\psi_- - \bar{W}^{''}(\bar{\phi})\bar{\psi}_-\bar{\psi}_+ + |F+\bar{W}^{'}(\bar{\phi})|^2)\end{aligned} \tag{33}$$

3.2 以旋量场和标量场作为第一性的自由度

F一直是我们引入的辅助标量场，这时候可以解出F的运动方程为

$$F = -\bar{W}'(\bar{\phi}) \tag{34}$$

从另一个角度看，我们这时候得到了超场的费米部分（ψ）和玻色部分（ϕ）的一个有关超势的作用量，如果我们认为这个旋量场和标量场是第一性的，而非超场是第一性的，我们可以将超场的超对称变换写作此时的标量场，旋量场和辅助场分别的变换

$$\delta\phi = \epsilon_+\psi_- - \epsilon_-\psi_+ \tag{35}$$

$$\delta\psi_\pm = \pm 2i\bar{\epsilon}_\mp\partial_\pm\phi + \epsilon_\pm F \tag{36}$$

$$\delta F = -2i\bar{\epsilon}_+\partial_-\psi_+ - 2i\bar{\epsilon}_-\partial_+\psi_- \tag{37}$$

回顾我们理论的基本假设，理论是一个2d的世界面场论，同时此时的旋量Ψ是Weyl旋量，由旋量代数的表示我们知道，此时的Weyl旋量只有一个复自由度，因此此时我们直接作为复数就可以计算。但是，一个复自由度等价于两个实自由度，同时又有两个空间维度，因此一共有四个不同的守恒流，而每个守恒流写作复数形式，但和其复共轭并不独立，我们显式写出来：

$$G^0_\pm = 2\partial_\pm\bar{\phi}\psi_\pm \mp \bar{\psi}_\mp\bar{W}'(\bar{\phi}) \tag{38}$$

$$G^1_\pm = \mp 2\partial_\pm\bar{\phi}\psi_\pm - i\bar{\psi}_\mp\bar{W}'(\bar{\phi}) \tag{39}$$

$$\bar{G}^0_\pm = 2\bar{\psi}_\pm\partial_\pm\phi \pm i\psi_\pm W'(\phi) \tag{40}$$

$$\bar{G}^1_\pm = \mp 2\bar{\psi}_\pm\partial_\pm\phi \pm i\psi_\mp W'(\phi) \tag{41}$$

我们因此可以得到守恒荷

$$\mathcal{Q}_\pm = \int dx^1 G^0_\pm, \bar{\mathcal{Q}}_\pm = \int dx^1 \bar{G}^0_\pm \tag{42}$$

在超对称变换下守恒荷以旋量形式变换

$$\mathcal{Q}_\pm \to e^{\mp\frac{\gamma}{2}}\mathcal{Q}_\pm, \bar{\mathcal{Q}}_\pm \to e^{\mp\frac{\gamma}{2}}\bar{\mathcal{Q}}_\pm \tag{43}$$

此即N=(2,2)超对称变换的守恒荷（之后简记为超荷）

3.3 全局对称性的分析

回顾我们之前定义的axial rotation，如果我们将axial rotation的charge设为0则

$$e^{i\alpha F_A}:\Phi(x^\mu,\theta^\pm,\bar{\theta}^\pm)\to\Phi(x^\mu,e^{\mp i\beta}\theta^\pm,e^{\pm i\beta}\bar{\theta}^\pm) \tag{44}$$

我们可以发现：由于$\theta^4=\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-$和$\theta^2=\theta^+\theta^-$都是axial不变的，因此这个作用量也是axial不变的。如果我们将超场的axial变换写成对旋量场和标量场分别同时的axial变换，

$$\phi\to\phi,\psi_\pm\to e^{\mp i\beta}\psi_\pm \tag{45}$$

则对应的守恒流为

$$J_A^0=\bar{\psi}_+\psi_+-\bar{\psi}_-\psi_- \tag{46}$$

$$J_A^1=-\bar{\psi}_+\psi_+-\bar{\psi}_-\psi_- \tag{47}$$

我们也可以定义守恒荷

$$F_A=\int J_A^0dx^1 \tag{48}$$

利用旋量场和标量场在axial rotation下的变换，我们可以发现超荷此时是如何变换的

$$\mathcal{Q}_\pm\to e^{\mp i\beta}\mathcal{Q}_\pm,\bar{\mathcal{Q}}_\pm\to e^{\pm i\beta}\bar{\mathcal{Q}}_\pm \tag{49}$$

现在考虑vector rotation

$$e^{i\alpha F_V}:\mathcal{F}(x^\mu,\theta^\pm,\bar{\theta}^\pm)\to e^{i\alpha q_V}\mathcal{F}(x^\mu,e^{-i\alpha}\theta^\pm,e^{i\alpha}\bar{\theta}^\pm) \tag{50}$$

由于对θ^2有

$$\theta^2\to e^{-2i\alpha}\theta^2 \tag{51}$$

则对

$$W(\Phi)=c\Phi^k \tag{52}$$

时，需要令

$$q_V=\frac{2}{k} \tag{53}$$

使整个作用量不变，此时

$$\phi\to e^{(2/k)i\alpha}\phi,\psi_\pm\to e^{((2/k)-1)i\alpha}\psi_\pm \tag{54}$$

即有守恒流

$$J_V^0 = (2i/k)(\partial_0\bar{\phi}\phi - \bar{\phi}\partial_0\phi) - (2/k-1)(\bar{\psi}_+\psi_+ + \bar{\psi}_-\psi_-) \tag{55}$$

$$J_V^1 = (2i/k)(-\partial_1\bar{\phi}\phi + \bar{\phi}\partial_1\phi) + (2/k-1)(\bar{\psi}_+\psi_+ - \bar{\psi}_-\psi_-) \tag{56}$$

守恒荷为

$$F_V = \int J_V^0 dx^0 \tag{57}$$

超荷在vector rotation下的变换为

$$\mathcal{Q}_\pm \to e^{-i\alpha}\mathcal{Q}_\pm, \bar{\mathcal{Q}}_\pm \to e^{i\alpha}\bar{\mathcal{Q}}_\pm \tag{58}$$

4 从超对称代数再看2d N=(2,2)理论

将我们上面完全从场论的角度理解的超对称，转化为代数角度的超对称，需要做的是将最开始的超场的微分算符Q和此时的超荷$\mathcal{Q}$建立自然的同构，即对之前的

$$\delta = \epsilon_+ Q_- - \epsilon_- Q_+ - \bar{\epsilon}_+\bar{Q}_- + \bar{\epsilon}_-\bar{Q}_+ \tag{59}$$

作用在某个观测量$\mathcal{O}$上时，我们应当建立关联形如

$$\delta\mathcal{O} = [\hat{\delta}, \mathcal{O}] \tag{60}$$

而上式中的$\hat{\delta}$为

$$\hat{\delta} = i\epsilon_+\mathcal{Q}_- - i\epsilon_-\mathcal{Q}_+ - i\bar{\epsilon}_+\bar{\mathcal{Q}}_- + i\bar{\epsilon}_-\bar{\mathcal{Q}}_+ \tag{61}$$

我们此时也有时空本身要求的对称性，即哈密顿算符H，动量算符P，角动量算符M，综合起来我们有2d N=(2,2)超对称理论的代数结构

$$\begin{aligned}
&\mathcal{Q}_+^2 = \mathcal{Q}_-^2 = \bar{\mathcal{Q}}_+^2 = \bar{\mathcal{Q}}_-^2 = 0\\
&\left\{\mathcal{Q}_\pm, \bar{\mathcal{Q}}_\pm\right\} = H \pm P\\
&\left\{\bar{\mathcal{Q}}_+, \bar{\mathcal{Q}}_-\right\} = \left\{\mathcal{Q}_+, \mathcal{Q}_-\right\} = 0\\
&\left\{\mathcal{Q}_-, \bar{\mathcal{Q}}_+\right\} = \left\{\mathcal{Q}_+, \bar{\mathcal{Q}}_-\right\} = 0\\
&[iM, \mathcal{Q}_\pm] = \mp\mathcal{Q}_\pm, \quad \left[iM, \bar{\mathcal{Q}}_\pm\right] = \mp\bar{\mathcal{Q}}_\pm\\
&[iF_V, \mathcal{Q}_\pm] = -i\mathcal{Q}_\pm, \quad \left[iF_V, \bar{\mathcal{Q}}_\pm\right] = i\bar{\mathcal{Q}}_\pm,\\
&[iF_A, \mathcal{Q}_\pm] = \mp i\mathcal{Q}_\pm, \quad \left[iF_A, \bar{\mathcal{Q}}_\pm\right] = \pm i\bar{\mathcal{Q}}_\pm.
\end{aligned} \tag{62}$$

此时我们的理论只是2d的，因此

$$\mathcal{Q}_{\pm}^{\dagger} = \bar{\mathcal{Q}}_{\pm} \tag{63}$$

我们同时可以定义中心荷

$$\{\bar{\mathcal{Q}}_{+}, \bar{\mathcal{Q}}_{-}\} = Z, \{\mathcal{Q}_{+}, \mathcal{Q}_{-}\} = Z^{*} \tag{64}$$

$$\{\mathcal{Q}_{-}, \bar{\mathcal{Q}}_{+}\} = \tilde{Z}, \{\mathcal{Q}_{+}, \bar{\mathcal{Q}}_{-}\} = \tilde{Z}^{*} \tag{65}$$

5 镜像对称性

5.1 镜像对称性的叙述

我们在上文中分析了2d N=(2,2)理论中的离散对称性和Lorentz对称性，这些对称性在其他理论中都存在，是相对来说平凡的。除此之外，在2d N=(2,2)理论中还存在一种并不平凡的对称性，即镜像对称性。回顾上一节中我们推导的超对称代数的后半部分，如果我们对代数做

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{-} &\to \bar{\mathcal{Q}}_{-} \\ F_V &\to F_A \\ Z &\to \tilde{Z} \end{aligned} \tag{66}$$

而其他所有生成元保持不变，则超对称代数本身也保持了不变，但此时对应的两个理论是不同的。如此关联的两个理论就互为镜像理论，这样的对称性也称为镜像对称性。

5.2 N=(2,2)超共形代数

如果我们将N=2的超对称代数和2d的共形代数（Virasoro代数）结合，便成为了2d超共形场论的代数结构。其生成元包括：

- 能量-动量张量 $T(z)$
- 两个超流 $G^{\pm}(z)$

- $U(1)$流 $J(z)$

由于此时的N=2理论包含了共形场论，我们用共形场论中常用的算子乘积展开方法表达其代数关系，而不用生成元的方法表达，其算子乘积展开(OPE)关系为：

$$T(z)T(w) \sim \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} \tag{67}$$

$$T(z)G^{\pm}(w) \sim \frac{3/2G^{\pm}(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial G^{\pm}(w)}{z-w} \tag{68}$$

$$T(z)J(w) \sim \frac{J(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial J(w)}{z-w} \tag{69}$$

$$J(z)G^{\pm}(w) \sim \pm\frac{G^{\pm}(w)}{z-w} \tag{70}$$

$$G^{+}(z)G^{-}(w) \sim \frac{2c/3}{(z-w)^3} + \frac{2J(w)}{(z-w)^2} + \frac{2T(w)+\partial J(w)}{z-w} \tag{71}$$

这些量对应的模式展开为：

$$T(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{L_n}{z^{n+2}}, \quad G^{\pm}(z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}+\nu} \frac{G_r^{\pm}}{z^{r+3/2}}, \quad J(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{J_n}{z^{n+1}} \tag{72}$$

其中$\nu = 0$（R sector）或$\nu = 1/2$（NS sector）。由于N=(2,2)超共形代数是两个N=2超共形代数的组合，我们先在N=2定义手征算子，若

$$G^{+}_{-1/2}\phi = 0, \quad L_0\phi = \frac{1}{2}J_0\phi \tag{73}$$

则称为一个primary的手征算子，反之若

$$G^{-}_{-1/2}\phi = 0, \quad L_0\phi = \frac{1}{2}J_0\phi \tag{74}$$

则称为一个primary的反手征算子。而所有手征算子有一个有限维交换环结构，称之为手征环

$$\mathcal{R}_c = \bigoplus_{0\leq q\leq c/3} \mathcal{R}_c^{(q)} \tag{75}$$

其中q为$U(1)$荷，满足$h = \frac{q}{2}$。手征环在算子乘积下封闭：

$$\phi_i \times \phi_j = \sum_k C_{ij}^k \phi_k \tag{76}$$

5.3 何以为“镜”

在一个Calabi-Yau流形上，同样有类似的环结构，即Dolbeault上同调环。在90年代，人们发现刚才定义的手征环和上同调环是互相对应的，即将每个primary的手征算子对应一个流形上的微分形式，将G^+和G^-生成元对应为流形的外微分算符，

1. **算子-形式对应：** 将费米场ψ^i对应到切丛的基$\frac{\partial}{\partial z^i}$，$\psi^{\bar{\imath}}$对应到余切丛的基$d\bar{z}^i$。手征初级算子：

$$\phi = \phi_{i_1 \cdots i_p \bar{\jmath}_1 \cdots \bar{\jmath}_q} \psi^{i_1} \cdots \psi^{i_p} \psi^{\bar{\jmath}_1} \cdots \psi^{\bar{\jmath}_q} \tag{77}$$

对应(p,q)-形式。

2. **上同调条件：** G^+的零模条件$G^+_{-1/2}\phi = 0$对应$\bar{\partial}$闭性：

$$G^+ \leftrightarrow \bar{\partial}, \quad G^- \leftrightarrow \partial \tag{78}$$

这样完成了一个手征环和上同调环的对应

$$\mathcal{R}_{cc} \cong \bigoplus_{p,q} H^{p,q}(X) \tag{79}$$

$$\mathcal{R}_{ac} \cong \bigoplus_{p,q} H^{p,n-q}(X) \tag{80}$$

其中a代表anti-chiral（反手征），c代表chiral（手征）。而我们在前四节对世界面形式的超对称场论叙述的镜像对称性中恰好将反手征和手征在镜像对称性下连接了起来，即

$$\begin{gathered} \mathcal{Q}_- \to \bar{\mathcal{Q}}_- \\ F_V \to F_A \\ Z \to \tilde{Z} \end{gathered} \tag{81}$$

这就意味着不仅手征环和反手征环应该是同构的，流形上的这两个上同调环也应该是同构的！

$$h^{p,q} = h^{n-p,q} \tag{82}$$

其中n为流形的维度，这个有关上同调群维度（hodge数）的叙述即镜像对称性的几何叙述。在数学对复流形的描述中，经常把这些hodge数写成一个菱形的形式，即hodge diamond

$$\begin{array}{ccccc} & & h^{0,0} & & \\ & h^{1,0} & & h^{0,1} & \\ h^{2,0} & & h^{1,1} & & h^{0,2} \\ & \vdots & & \vdots & \\ h^{n,0} & & \cdots & & h^{0,n} \\ & \vdots & & \vdots & \\ & h^{n,n-1} & & h^{n-1,n} & \\ & & h^{n,n} & & \end{array}$$

其中$h^{p,q} = \dim H^{p,q}(M)$。对于3维的Calabi-Yau流形，这个hodge diamond简化为

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & 0 & & h^{1,1} & & 0 & \\ 1 & & h^{1,2} & & h^{2,1} & & 1 \\ & 0 & & h^{1,1} & & 0 & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & & & 1 & & & \end{array}$$

可见这里的对称性

$$h^{p,q} = h^{n-p,q} \tag{83}$$

即将这个hodge diamond沿着-45度的方向镜像反转，这就是镜像对称性这个名字的由来。